

Stanisław Barzowski

Adres: 81-472 Gdynia ul. Legionów 113/5  
Adres email: arox606@gmail.com  
Nazwa szkoły: Gimnazjum nr 24 w Gdyni  
Klasa: III gm  
Adres szkoły: 81-405 Gdynia ul. Legionów 27  
Numer telefonu do szkoły: 58 622 18 33

Zadanie: 7  
Arkusz: 1/3

**Lemat 1.** Dla dowolnego nieparzystego  $x$ , zachodzi  $\text{nwd}(x, x+4) = 1$

*Dowód.* Dowodzimy nie wprost, założmy że  $\text{nwd}(x, x+4) > 1$ . W takim razie  $x$  i  $x+4$  muszą być podzielne przez pewną liczbę pierwszą  $p$ .

$p$  nie może być większe od 4, gdyż wtedy jeśli  $x$  byłoby wielokrotnością  $p$ , to  $x+4$  już by nie mogło.

$p$  nie może być równe 4, gdyż 4 nie jest liczbą pierwszą.

$p$  nie może być mniejsze od 4, gdyż wtedy albo  $p = 2$ , albo  $p = 3$ . Gdyby  $p = 2$ , to  $x$  byłoby podzielne przez 2, a zgodnie z założeniami  $x$  jest nieparzyste, a jeżeli  $p = 3$  i  $x$  jest wielokrotnością  $p$ , to  $x+4$  nie jest wielokrotnością  $p$ .

A więc takie  $p$  nie istnieje, co jest sprzeczne z założeniami. Możemy teraz wyciągnąć wniosek, że  $\text{nwd}(x, x+4) = 1$ . Co kończy dowód lematu.

**Spostrzeżenie 1.** Liczba całkowita dodatnia  $x$  jest sześcianem liczby całkowitej, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby pierwszej  $p$ , liczba całkowita dodatnia  $k$ , taka że  $p^{3k} \mid x$  i  $p^{3k+1} \nmid x$ .

**Lemat 2.** Dla dowolnych całkowitych  $x, y, z$ , takich że  $\text{nwd}(x, y) = 1$  i  $x \cdot y = z^3$ , liczby  $x$  i  $y$  są sześcianami liczb całkowitych.

*Dowód.* Dla dowolnej liczby pierwszej  $p$ , zgodnie ze spostrzeżeniem 1, istnieje takie całkowite nieujemne  $k$ , że  $p^{3k} \mid z^3$  i  $p^{3k+1} \nmid z^3$ . Ponieważ liczby  $x$  i  $y$  nie mogą być jednocześnie podzielne przez  $p$ , to możliwe są dwie sytuacje:

$$p^{3k} \mid x \wedge p^{3k+1} \nmid x \wedge p \nmid y$$

albo

$$p^{3k} \mid y \wedge p^{3k+1} \nmid y \wedge p \nmid x$$

A więc zgodnie ze spostrzeżeniem 1 liczby  $x$  i  $y$  są sześcianami liczb całkowitych.

**Lemat 3.** Dla dowolnego nieparzystego dodatniego  $x$  liczby  $x-2$  i  $x+2$  nie są jednocześnie sześcianami liczb naturalnych.

*Dowód.* Dowodzimy nie wprost, założmy że istnieje takie nieparzyste dodatnie  $x$ , że  $x - 2$  i  $x + 2$  są jednocześnie sześcianami liczb naturalnych. Przyjmijmy  $p^3 = x + 2$  i  $k^3 = x - 2$ .

$$p^3 - k^3 = x + 2 - (x - 2) = 2 - (-2) = 4$$

Dla danego  $k$ , najmniejszą możliwą wartością  $p^3$  jest  $(k + 1)^3$  więc:

$$p^3 \geq (k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + k + 1$$

więc dla dowolnych  $k$  i  $p$  zachodzi:

$$p^3 - k^3 \geq 3k^2 + k + 1$$

$$4 \geq 3k^2 + k + 1$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki:

1.  $x < 9$ , wtedy  $x$  należy do zbioru  $\{1, 3, 5, 7\}$ .

$x$	$x - 2$	$x + 2$	Wyjaśnienie
1	-1	3	3 nie jest sześcianem liczby całkowitej.
3	1	5	5 nie jest sześcianem liczby całkowitej.
5	3	7	7 nie jest sześcianem liczby całkowitej.
7	5	9	9 nie jest sześcianem liczby całkowitej.

Z czego wniosek, że nie istnieje takie nieparzyste dodatnie  $x < 9$ , żeby  $x - 2$  i  $x + 2$  były jednocześnie sześcianami liczb naturalnych.

2.  $x \geq 9$ , wtedy

$$k^3 \geq 9$$

A więc tym bardziej:

$$k^3 \geq 8$$

$$k \geq 2$$

$$4 \geq 3k^2 + k + 1 \geq 3 \cdot 2 + 2 + 1 = 9$$

$$4 \geq 9$$

Co jest nieprawdziwe, więc nie istnieje takie nieparzyste dodatnie  $x \geq 9$ , żeby  $x - 2$  i  $x + 2$  były jednocześnie sześcianami liczb naturalnych.

Nie istnieje więc takie nieparzyste dodatnie  $x$ , że  $x - 2$  i  $x + 2$  są jednocześnie sześcianami liczb naturalnych. Co kończy dowód lematu.

Dowodzimy nie wprost, założmy że istnieją takie nieparzyste dodatnie  $a$  i  $b$ , że:

$$a^2 - b^3 = 4$$

Wtedy:

$$a^2 - 4 = b^3$$

$$a^2 - 2^2 = b^3$$

$$(a - 2)(a + 2) = b^3$$

$$(a - 2)((a - 2) + 4) = b^3$$

Zgodnie z lematem 1  $\text{nwd}((a - 2), (a - 2) + 4) = 1$ .

Zgodnie z lematem 2 istnieją takie całkowite  $k$  i  $p$ , że:

$$k^3 = a - 2$$

oraz

$$p^3 = a + 2$$

Z drugiej strony na mocy lematu 3, liczby  $a - 2$  i  $a + 2$  nie mogą być jednocześnie sześcianami liczb naturalnych co jest sprzeczne z powyższym.

**Wniosek:** Nie istnieją takie nieparzyste dodatnie  $a$  i  $b$ , że  $a^2 - b^3 = 4$ . Co kończy dowód.