

Stanisław Barzowski

Adres: 81-472 Gdynia ul. Legionów 113/5  
Adres email: arox606@gmail.com  
Nazwa szkoły: Gimnazjum nr 24 w Gdyni  
Klasa: III gm  
Adres szkoły: 81-405 Gdynia ul. Legionów 27  
Numer telefonu do szkoły: 58 622 18 33

Zadanie: 5  
Arkusz: 1/3

Wprowadźmy oznaczenia:

Przez  $\mathbf{A}$ , rozumiemy wspomnianą w zadaniu tablicę.

Przez  $a_{i,j}$  rozumiemy liczbę wpisaną w pole w wierszu  $i$ -tym (od góry) i kolumnie  $j$ -tej (od lewej).

Przez  $x$  rozumiemy sumę liczb wpisanych w pola, które znajdują się na obu przekątnych  $\mathbf{A}$ .

**Lemat 1.**  $a_{i,j} = a_{i+2,j} = a_{i,j+2} = a_{i+2,j+2}$ , dla wszystkich naturalnych  $i, j$  takich, że  $1 \leq i, j \leq 98$ .

*Dowód.*

$$a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+2} = a_{i+2,j} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+2}$$

$$a_{i,j} = a_{i+2,j}$$

$$a_{i,j+2} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+2} = a_{i+2,j+2} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+2}$$

$$a_{i,j+2} = a_{i+2,j+2}$$

$$a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+2} = a_{i,j+2} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+2}$$

$$a_{i,j} = a_{i,j+2}$$

A więc:  $a_{i,j} = a_{i+2,j} = a_{i,j+2} = a_{i+2,j+2}$  Co kończy dowód lematu.

Co kończy dowód lematu.

**Lemat 2.**  $a_{i,j} = a_{i+2,j} = a_{i,j+2} = a_{i+2,j+2} = a_{i+1,j+1} = -a_{i+1,j} = -a_{i+1,j+2} = -a_{i,j+1} = -a_{i+2,j+1}$ , dla wszystkich naturalnych  $i, j$  takich, że  $1 \leq i, j \leq 98$ .

*Dowód.* Możemy sformułować układ równań:

$$\begin{cases} a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i+2,j} + a_{i+2,j+1} = 0 \\ a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+2} = 0 \\ a_{i,j} + a_{i,j+1} + a_{i+1,j+1} + a_{i+2,j+1} = 0 \end{cases}$$

Zgodnie z lematem 1:

$$a_{i,j} = a_{i+2,j} = a_{i,j+2} = a_{i+2,j+2}$$

$$a_{i+1,j} = a_{i+1,j+2}$$

$$a_{i,j+1} = a_{i+2,j+1}$$

$$\begin{cases} 2a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} = 0 \\ a_{i,j} + 2a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} = 0 \\ a_{i,j} + 2a_{i,j+1} + a_{i+1,j+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} = 0 \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j} + 2a_{i,j+1} + a_{i+1,j+1} = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} -4a_{i+1,j} - 2a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} = 0 \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} + 2a_{i,j+1} + a_{i+1,j+1} = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} -4a_{i+1,j} - 2a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} = 0 \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ -2a_{i+1,j} + 2a_{i,j+1} = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} -4a_{i+1,j} - 2a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} = 0 \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ 2a_{i,j+1} = 2a_{i+1,j} \quad / : 2 \end{cases} \\
& \begin{cases} -4a_{i+1,j} - 2a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} = 0 \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j+1} = a_{i+1,j} \end{cases} \\
& \begin{cases} -4a_{i+1,j} - 2a_{i+1,j+1} + 2a_{i+1,j} = 0 \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j+1} = a_{i+1,j} \end{cases} \\
& \begin{cases} -2a_{i+1,j} - 2a_{i+1,j+1} = 0 \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j+1} = a_{i+1,j} \end{cases} \\
& \begin{cases} -2a_{i+1,j} = 2a_{i+1,j+1} \quad / : 2 \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j+1} = a_{i+1,j} \end{cases} \\
& \begin{cases} -a_{i+1,j} = a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j} = -2a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j+1} = a_{i+1,j} \end{cases} \\
& \begin{cases} -a_{i+1,j} = a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j} = 2a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j+1} = a_{i+1,j} \end{cases} \\
& \begin{cases} -a_{i+1,j} = a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j} = a_{i+1,j+1} \\ a_{i,j+1} = a_{i+1,j} \end{cases}
\end{aligned}$$

Z czego można wyciągnąć wniosek, że:

$$a_{i,j} = a_{i+2,j} = a_{i,j+2} = a_{i+2,j+2} = a_{i+1,j+1} = -a_{i+1,j} = -a_{i+1,j+2} = -a_{i,j+1} = -a_{i+2,j+1}$$

Co kończy dowód lematu.

**Spostrzeżenie 1.** *Na podstawie lematu 2, można zauważyć, że:*

$$a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = \dots = a_{50,50} = \dots a_{100,100}$$

*i analogicznie:*

$$a_{100,1} = a_{99,2} = a_{98,3} = \dots = a_{50,51} = \dots a_{1,100}$$

**Spostrzeżenie 2.** *Zgodnie z lematem 2:  $a_{50,50} = -a_{50,51}$*

$$x = \underbrace{a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + \dots + a_{100,100}}_{\text{pierwsza przekątna}} + \underbrace{a_{100,1} + a_{99,2} + a_{98,3} + \dots + a_{1,100}}_{\text{druga przekątna}}$$

Zgodnie ze spostrzeżeniem 1:

$$x = 100 \cdot a_{50,50} + 100 \cdot a_{50,51}$$

Zgodnie z spostrzeżeniem 2:

$$x = 100 \cdot a_{50,50} - 100 \cdot a_{50,50}$$

$$x = 0$$

**Wniosek:** Suma liczb wpisanych w pola na obu przekątnych tablicy wynosi 0.