

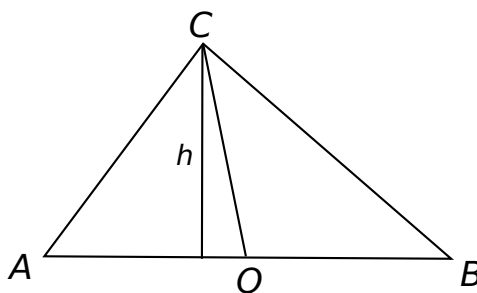
Stanisław Barzowski

Adres: 81-472 Gdynia ul. Legionów 113/5
Adres email: arox606@gmail.com
Nazwa szkoły: Gimnazjum nr 24 w Gdyni
Klasa: III gm
Adres szkoły: 81-405 Gdynia ul. Legionów 27
Numer telefonu do szkoły: 58 622 18 33

Zadanie: 4
Arkusz: 1/2

Lemat 1. Jeżeli $\triangle ABC$ jest trójkątem i Q jest środkiem boku AB , to:

$$P_{\triangle AQC} = P_{\triangle QBC} = \frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$$



Dowód.

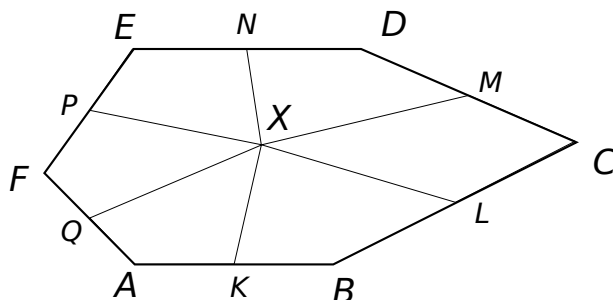
$$P_{\triangle ABC} = \frac{|AB| \cdot h}{2}$$

$$P_{\triangle AQC} = \frac{|AQ| \cdot h}{2} = \frac{\frac{|AB|}{2} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \frac{|AB| \cdot h}{2} = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC}$$

$$P_{\triangle QBC} = \frac{|QB| \cdot h}{2} = \frac{\frac{|AB|}{2} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \frac{|AB| \cdot h}{2} = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC}$$

$$P_{\triangle AQC} = P_{\triangle QBC} = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC}.$$

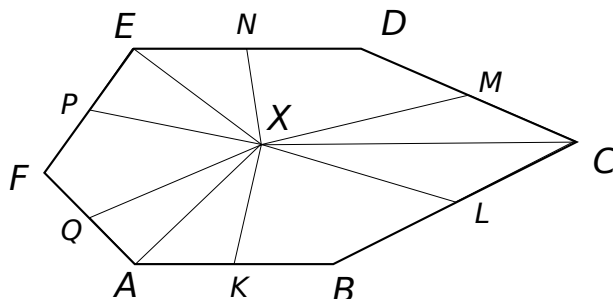
Co kończy dowód lematu.



Spostrzeżenie 1. $P_{ABCDEF} = P_{\triangle ABX} + P_{\triangle BCX} + P_{\triangle CDX} + P_{\triangle DEX} + P_{\triangle EFX} + P_{\triangle FAX}$

Podzielimy każdy z czworokątów $QAKX$, $LCMX$ i $NEPX$ na trójkąty:

$$P_{QAKX} + P_{LCMX} + P_{NEPX} = P_{\triangle QAX} + P_{\triangle AKX} + P_{\triangle LCX} + P_{\triangle CMX} + P_{\triangle NEX} + P_{\triangle EPX}$$



Zgodnie z lematem 1:

$$P_{\triangle QAX} = \frac{1}{2}P_{\triangle FAX}$$

$$P_{\triangle AKX} = \frac{1}{2}P_{\triangle ABX}$$

$$P_{\triangle LCX} = \frac{1}{2}P_{\triangle BCX}$$

$$P_{\triangle CMX} = \frac{1}{2}P_{\triangle CDX}$$

$$P_{\triangle NEX} = \frac{1}{2}P_{\triangle DEX}$$

$$P_{\triangle EPX} = \frac{1}{2}P_{\triangle EFX}$$

Zgodnie ze spostrzeżeniem 1:

$$\begin{aligned} P_{QAKX} + P_{LCMX} + P_{NEPX} &= \\ &= P_{\triangle QAX} + P_{\triangle AKX} + P_{\triangle LCX} + P_{\triangle CMX} + P_{\triangle NEX} + P_{\triangle EPX} = \\ &= \frac{1}{2}(P_{\triangle ABX} + P_{\triangle BCX} + P_{\triangle CDX} + P_{\triangle DEX} + P_{\triangle EFX} + P_{\triangle FAX}) = \\ &= \frac{1}{2}P_{ABCDEF} \end{aligned}$$

Wniosek: Suma pól czworokątów $QAKX$, $LCMX$ i $NEPX$ jest zawsze równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$, a więc jest niezależna od wyboru punktu X .

Czego należało dowieść.